

Exercice 1 : (5 points)

Soient ABC un triangle équilatéral de sens direct et (\mathcal{C}) son cercle circonscrit de centre J .

Soit O et I les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$.

Recopier la figure sur votre copie et la compléter au fur et à mesure.

1) Soit S la similitude directe qui transforme A en B et C en I

a) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S .

b) Soit Ω le centre de S . Montrer que Ω appartient à (\mathcal{C}) .

c) Montrer que les points Ω , A et I sont alignés.

d) Construire alors Ω et montrer que le triangle $JB\Omega$ est équilatéral.

2) Soit h l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$ et $R = S^{-1} \circ h$.

Déterminer $R(C)$. Caractériser alors R .

3) Montrer qu'il existe une seule similitude indirecte f telle que $f(J) = A$ et $f(B) = C$.

a) Montrer que le rapport de f est $\sqrt{3}$ et que $f(\Omega) = B$.

b) Soit K le centre de f . Montrer que K appartient à (ΩC) .

c) Construire alors K , ainsi que l'axe Δ de f .

4) On suppose dans la suite que $AB = 2$ et on munit le plan d'un repère orthonormé direct (O, \vec{OB}, \vec{v})

Montrer que l'écriture complexe de f est $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{2} \frac{z}{z} + \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$ puis déduire l'affixe du point K .

5) Soit le point $M(\frac{1}{\cos \theta}, \sqrt{3} \tan \theta)$ où $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Montrer que M décrit une partie d'une hyperbole \mathcal{H} dont les sommets sont les points A et B .

Exercice 2 : (4 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

On considère la conique (Γ) de foyer $F(-2,0)$, de directrice associée au foyer F la droite D d'équation $x = -5$ et passant par le point K de coordonnées $(-1, \sqrt{3})$.

1) a) Montrer que l'excentricité de (Γ) est égale à $\frac{1}{2}$ puis déduire la nature de (Γ) .

b) Montrer qu'une équation cartésienne de (Γ) est : $3x^2 + 4y^2 + 6x - 9 = 0$

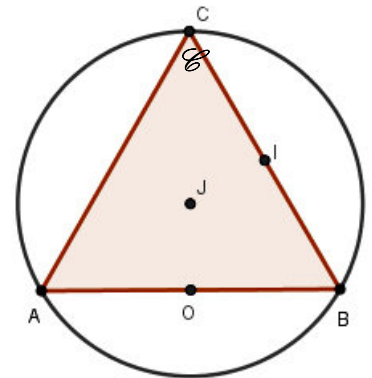
c) Préciser le centre, les sommets, le second foyer et la deuxième directrice de (Γ) .

2) Pour tout $\theta \in]0, \pi[$ on note $M_\theta(2 \cos \theta - 1, \sqrt{3} \sin \theta)$ et $N_\theta(3, \frac{3-6 \cos \theta}{\sqrt{3} \sin \theta})$

a) Vérifier que M_θ appartient à Γ et qu'une équation cartésienne de la tangente T_θ en M_θ à Γ est :

$$3x \cos \theta + 2\sqrt{3}y \sin \theta + 3 \cos \theta - 6 = 0.$$

b) Montrer que le triangle $ON_\theta M_\theta$ est rectangle en O et que la droite $(N_\theta M_\theta)$ est tangente à Γ .



3) On note $C\left(\sqrt{3}-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

- Vérifier que C appartient à Γ puis construire le point C.
- Construire la tangente T à Γ en C.
- On désigne par I et J les points d'intersection de Γ avec l'axe des ordonnées.
Construire les tangentes T_1 et T'_1 à Γ respectivement en I et J.
- Tracer Γ .

Exercice 3 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = e^{-x} - \ln x$

A / 1) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α et que $\alpha \in]1, 2[$.

c) Tracer la courbe (C) de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

2) Soit $\lambda \in]0, 1[$ et $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 1$.

a) Montrer que $A(\lambda) = e^{-\lambda} + \lambda \ln \lambda - \lambda$

b) Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} A(\lambda)$.

3) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

a) Montrer que pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n-1$, $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$, $S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq A\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n - \frac{1}{n}$

c) Montrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = e$

4) On considère les suites (U_n) et (V_n) définies sur \mathbb{N}^* par $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k}{n}\right)$ et $V_n = \frac{e}{n} \sum_{k=1}^n e^{-\frac{k}{n}}$

a) Etablir les égalités : $U_n = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)$ et $V_n = \frac{e-1}{n(e^n-1)}$ pour tout n de \mathbb{N}^*

b) Vérifier que pour tout n de \mathbb{N}^* : $S_n = V_n - U_n$

c) Utiliser les résultats précédents pour démontrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -1$

d) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

B / 1) Déterminer le sens de variation de f' dans l'intervalle $[1, 2]$

2) Soit g la fonction définie sur $[1, \alpha]$ par $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Montrer g réalise une bijection de $[1, \alpha]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3) Soit la suite (w_n) définie sur \mathbb{N} par $\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = g(w_n) \end{cases}$



- a) Montrer que pour tout entier naturel n , $1 \leq w_n < \alpha$.
- b) Montrer que la suite (w_n) est croissante.
- c) En déduire que la suite (w_n) est convergente puis déterminer sa limite

Exercice 4 : (5 points)

I / Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en 0.

2) Montrer que f est une fonction paire.

3) Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = \frac{x}{1+x} - \ln(1+x)$.

a) Dresser le tableau de variation de g et en déduire le signe de $g(x)$.

b) Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{2g(x^2)}{x^3}$ et en déduire le sens de variation de f sur $]0, +\infty[$

II / Soit F la fonction définie sur \mathbb{R} par $F(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$

On désigne par (C) la courbe de F dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Montrer que F est une fonction impaire.

2) Soit $x > 0$ et $\varphi(x) = \int_1^x f(t) dt$

a) Vérifier que $F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$ et déduire qu'il existe $c \in]x, 2x[$ tel que $F(x) = x f(c)$

b) Prouver que F est dérivable à droite en 0 et donner une équation de la tangente T à (C) en O .

c) Montrer que pour tout $x > 0$, $\frac{\ln(1+4x^2)}{4x} \leq F(x) \leq \frac{\ln(1+x^2)}{x}$ puis déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$.

3) a) Montrer que pour tout $x > 0$, $F'(x) = \frac{1}{2x^2} \ln\left(\frac{1+4x^2}{(1+x^2)^2}\right)$.

b) Dresser le tableau de variation de F sur $[0, +\infty[$.

c) Justifier que $\frac{\ln(3)}{2\sqrt{2}} \leq F(\sqrt{2}) \leq \frac{\ln(3)}{\sqrt{2}}$.

d) Tracer l'allure de la courbe (C) de F .

